Оригинальная статья / Original article

УДК 330.36.01
http://doi.org/10.35854/1998-1627-2025-2-212-218

Оптимизационная конкуренция и игровые модели в экономике

Онисе Гивович Баркалая
Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики, Санкт-Петербург, Россия, pampey16011958@mail.ru

Аннотация

Цель. Рассмотреть взаимосвязь между введенным ранее в статьях автора показателем оптимизационной конкуренции и широко распространенными в экономике игровыми моделями, в частности матричными играми с нулевой суммой.

Задачи. Определить количественную взаимосвязь между решениями игровых моделей и оптимизационной конкуренцией, позволяющую по-новому трактовать результаты игровых моделей в экономике; соотнести оптимальные стратегии в игровых моделях с показателем оптимизационной конкуренции.

Методология. На основе анализа проведено исследование взаимосвязи между введенным ранее показателем конкуренции (оптимизационной конкуренции) и игровыми моделями. На примерах установлена количественная связь оптимизационной конкуренции с результатами матричных игр с нулевой суммой в чистых и смешанных стратегиях.

Результаты. Ряд игровых моделей предполагают применение методов оптимизации, то есть методов линейного программирования, в матричных играх со смешанными стратегиями. Поскольку введенный ранее показатель оптимизационной конкуренции разработан именно для оптимизационных задач, то становится целесообразным исследование взаимосвязи между ним и решением игровых задач. Идея заключается в том, чтобы сопоставить расчеты показателя оптимизационной конкуренции с результатами игровых моделей. На примерах показаны закономерности того, как изменяется показатель оптимизационной конкуренции в зависимости от различного рода игровых моделей, в частности матричных игр. Определены различия и особенности в случаях матричных игр в чистых и смешанных стратегиях.

Выводы. Показана связь оптимизационной конкуренции с результатами матричных игр с нулевой суммой. «Чистый выигрыш» (или называемые в игровых экономических моделях «чистые стратегии») возможен только при ненулевой оптимизационной конкуренции, а средний, ожидаемый, с вероятностью, в зависимости от матрицы платежей, может сопровождаться как нулевой, так и ненулевой конкуренцией. Иными словами, чистый выигрыш требует того, чтобы конкуренция была наибольшей при других равных условиях. Данный подход позволяет по-новому подойти к трактовке результатов игровых моделей, в частности матричных игр с нулевой суммой. Сегодня результатом игры является лишь ее цена, определяемая в чистых или смешанных стратегиях. Но приведенные результаты говорят о том, что значение цены игры целесообразно сопоставлять со значением оптимизационной конкуренции, что дает дополнительную информацию для анализа в игровых экономических моделях.

Ключевые слова: *оптимизационная конкуренция, игровые модели в экономике, чистые и смешанные стратегии, оптимизация, эффективность*

Для цитирования: Баркалая О. Г. Оптимизационная конкуренция и игровые модели в экономике // *Экономика и управление.* 2025. Т. 31. № 2. С. 212–218. http://doi.org/10.35854/1998-1627-2025-2-212-218

Optimization competition and game models in economics

Onise G. Barkalaya
St. Petersburg University of Management Technologies and Economic, St. Petersburg, Russia, pampey16011958@mail.ru

Abstract

Aim. The work aimed to analyze the relationship between the optimization competition indicator introduced earlier in the author's articles and the game models widely used in economics, in particular, zero-sum matrix games.

Objectives. The work seeks to determine the quantitative relationship between the solutions of game models and optimization competition, which allows for a new interpretation of the results of game models in economics; as well as to correlate the optimal strategies in game models with the optimization competition indicator.

Methods. The analysis was used to perform a study of the relationship between the previously introduced competition indicator (optimization competition) and game models. Examples were applied to establish a quantitative relationship between optimization competition and the results of zero-sum matrix games in pure and mixed strategies.

Results. A number of game models involve the use of optimization methods, i.e. linear programming methods, in matrix games with mixed strategies. Since the previously introduced optimization competition indicator was developed specifically for optimization problems, it becomes appropriate to study the relationship between it and the solution of game problems. The idea consists in comparing the calculations of the optimization competition indicator with the results of game models. The examples present the patterns of changes in the optimization competition indicator depending on various types of game models, in particular, matrix games. The differences and features in the cases of matrix games in pure and mixed strategies were determined.

Conclusions. The work presents the relationship between optimization competition and the results of zero-sum matrix games. "Pure gain" (or "pure strategies" called in game economic models) is possible only with non-zero optimization competition, and the average one, expected, with probability, depending on the payoff matrix, can be accompanied by both zero and non-zero competition. In other words, pure gain requires that competition be greatest, all other things being equal. This approach allows a new approach to interpreting the results of game models, in particular, zero-sum matrix games. Nowadays, the game result is only its price determined in pure or mixed strategies. But the results given indicate that it is advisable to compare the value of the game price with the value of optimization competition, which provides additional information for analysis in game economic models.

Keywords: *optimization competition, game models in economics, pure and mixed strategies, optimization, efficiency*

For citation: Barkalaya O.G. Optimization competition and game models in economics. *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management.* 2025;31(2):212-218. (In Russ.). http://doi.org/10.35854/1998-1627-2025-2-212-218

Статья развивает авторский подход к понятию «оптимизационная конкуренция», изложенный нами ранее [1; 2]. Многие задачи оптимального распределения ресурсов, оптимального бюджетирования, целесообразного распределения инвестиций, оптимизации производственного плана, управления запасами и ряд других задач экономического содержания в математическом аспекте сводятся к решению оптимизационных задач, суть которых заключается в поиске наилучших решений, с одной стороны максимизирующих критерии (эффективность, прибыль, доходы, иное), с другой — обеспечивающих выполнение ряда ограничений в отношении ресурсов, финансовых возможностей, временных параметров, сырья, производственных возможностей и т. п. Этот класс задач всесторонне изучен [3; 4; 5; 6; 7].

В связи с подобными задачами нами рассмотрен иной аспект, который можно продемонстрировать на примере экономического характера. Предположим, производственное предприятие на конкурентной основе проводит тендер на закупку оборудования. Среди поставщиков — участников тендера — возникает конкуренция, поскольку их предложения о составе оборудования различаются по цене, технико-экономическим, временным и другим показателям. Во многих случаях выбор оптимального оборудования (победителя тендера) определяют с помощью математических моделей, основу которых составляет именно оптимизационная задача. Суть последней — нахождение оптимального состава оборудования, обеспечивающего максимальную эффективность (рентабельность, доходность и т. д.) предприятия при стоимостных и иных ограничениях.

Авторский подход состоит в следующем: если на практике (в экономике) возникает реальная конкуренция между экономическими субъектами, то каким образом конкуренция проявляется в моделях оптимизации, с помощью которых моделируются данные процессы и определяется оптимальный состав оборудования в интересах предприятия. В ряде работ [1; 2] введен показатель, являющийся своего рода математическим аналогом конкуренции. Назовем его оптимизационной конкуренцией. Исследование показателя конкуренции подробно рассмотрено ранее [2]. Теперь устанавливаем связь оптимизационной конкуренции с игровыми моделями. Игровые модели давно и прочно вошли в арсенал экономико-математических методов и используются для решения широкого круга задач [8; 9]. Целый ряд этих моделей предполагает и применение методов оптимизации. Например, методов линейного программирования (в матричных играх со смешанными стратегиями). Поэтому в настоящей статье предлагаем исследовать влияние введенного ранее [1; 2] показателя конкуренции (оптимизационной конкуренции) на результаты игровых моделей, то есть матричных игр с нулевой суммой. Существует ли связь между решением игровых моделей и оптимизационной конкуренцией? Попытаемся ответить на этот вопрос в процессе нашего исследования.

Рассмотрим понятие оптимизационной конкуренции. Предположим, что предприятие выпускает n видов продукции в количестве $x_1, .. \; x_n$. Цены на продукцию (все стоимостные показатели измеряют в условных единицах), в зависимости от ее вида, равны $c_1, .. \; c_n$. Представлены также m ограничений на выпуск продукции, среди которых финансовые ограничения, сырьевые, временные, производственные. Коэффициенты (b_j) $b_1, .. \; b_m$ отражают ограничения по выпуску продукции, а коэффициенты a_{ij}, фигурирующие в ограничениях (2), характеризуют удельный вес переменных $x_1, .. \; x_n$ в каждом ограничении. Для задач линейного программирования

$$\max_{x_1, x_2 .. x_n} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (1)$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \qquad (2)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \qquad (3)$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1,2 \ldots n, \; j = 1,2 \ldots m$$

условия оптимальности (теорема дополнительной нежесткости [8]) можно записать в виде:

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \;\text{ при }\; x_i^* > 0 \qquad (4)$$

$$c_i \le \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \;\text{ при }\; x_i^* = 0. \qquad (5)$$

Показатель конкуренции (или оптимизационной конкуренции) определяем следующим образом:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j a_{ji} - c_i). \qquad (6)$$

Физический смысл показателя — недостаток (дефицит) скорости целевой функции по всем нулевым (неконкурентным) переменным. Переменная x_i неконкурентна, если величина c_i, частная производная целевой функции по ней, не может взять «барьер», составленный из линейной комбинации частных производных ограничений (5). Показатель этот — так называемая жесткость отбора претендентов на ресурсы. Данный показатель несложно вычислить из индексной строки итоговой симплекс-таблицы: сумма элементов по столбцам свободных переменных. В случае отсутствия нулевых компонент в оптимальном решении оптимизационная конкуренция равно нулю. Показатель (6) может быть нормирован от 0 до 1:

$$K_{\text{норм}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j a_{ji} - c_i) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji}. \qquad (7)$$

Рассмотрим пример из исследования Х. А. Таха [8]. Две фармацевтические компании A и B продают два вида лекарств против гриппа. Компания A рекламирует продукцию на радио (A_1), телевидении (A_2), в интернете (A_3). Компания B, в дополнение

	B_1	B_2	B_3	B_4	Min строк
A_1	8	–2	9	–3	–3
A_2	6	5	6	8	5
A_3	–2	4	–9	5	–9
Max столбцов	8	5	9	8	

Рис. 1. Платежная матрица № 1
Fig. 1. Payoff matrix No. 1

Источник: составлено автором.

к использованию радио (B_1), телевидения (B_2), интернета (B_3), еще и рассылает почтой рекламные буклеты (B_4). Разумеется, каждая компания может привлечь на свою сторону покупателей лекарств. Приведенная на рисунке 1 матрица платежей характеризует процент клиентов, привлеченных либо потерянных компанией A. Какое выбрать решение из A_1, A_2, A_3?

Данную игровую задачу решаем в чистых стратегиях. Седловую точку (цена игры = 5) находим без труда. Однако для уяснения взаимосвязи игровой модели с оптимизационной конкуренцией сформулируем математическую постановку для игрока A таким образом, словно решение задачи с платежной матрицей на рисунке 1 требует смешанных стратегий:

$$\max_{x_1 \ldots x_3, w} w \tag{8}$$

$$w - 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 \le 0$$

$$w + 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \le 0$$

$$w - 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 \le 0$$

$$w + 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \le 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$

где x_i – вероятности выбора стратегий игроком A; $x_i \geqslant 0$ для $i = 1, 2, 3$.

Решение задачи (8) говорит о том, что оптимальная стратегия для игрока A обеспечивается при $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$. Иными словами, игрок A выбирает вторую строку, а игрок B — второй столбец. Седловая точка игры равна 5. В рассматриваемой задаче нижняя и верхняя цена игры совпадают, что предопределяет седловую точку (цену игры) величиной, равной 5.

Теперь оценим оптимизационную конкуренцию задачи (8) для игрока A. Поскольку в решении остальные переменные, кроме x_2, равны нулю, то это автоматически предопределит ненулевое значение показателей конкуренции (6, 7). Действительно, решив задачу (8) симплекс-методом и выполнив расчеты по формулам (6 и 7), получаем, что $K_{\text{норм}} = 0{,}889$. Таким образом, высокий уровень оптимизационной конкуренции. Это решение приводит нас к важному обобщению применительно к любой задаче в чистых стратегиях. Поскольку структура решения любой матричной игры в чистых стратегиях одинакова, то есть одна из переменных равна 1, остальные переменные $x_i = 0$, то в соответствии с условиями дополняющей нежесткости и правилом расчета оптимизационной конкуренции последняя всегда будет строго больше нуля. Это означает, что в игровой (матричной) модели получить «чистый выигрыш» невозможно при нулевой оптимизационной конкуренции. Непременно должна быть конкуренция, жесткость отбора. В предыдущих работах [1; 2] нами показано, что высокая эффективность, как правило, коррелируется с высоким уровнем оптимизационной конкуренции. Это теперь наблюдаем и в матричных играх: чистая стратегия, или «чистый выигрыш», связана с именно с положительной оптимизационной конкуренцией. Иными словами, «чистый выигрыш» предопределяет и бóльшую жесткость отбора переменных.

По аналогии с предыдущим выводом в игровых моделях, в которых седловая точка существует только при смешанных стратегиях, оптимизационная конкуренция может быть и нулевой, так как все соответствующие вероятности x_i (в сумме равные 1) могут быть положительны. Тогда, в полном соответствии с показателями (6, 7) K и $K_{\text{норм}}$ равны нулю. Рассмотрим следующую матричную игру, отраженную на рисунке 2.

В данном случае, как видно на рисунке 2, представлены только смешанные стратегии, значение цены игры (седловой точки) находится между 2 и 7. Решение соответствующей данной матрице платежей задачи

	B_1	B_2	B_3	Min строк
A_1	4	7	2	2
A_2	7	3	2	**2**
A_3	2	1	8	1
Max столбцов	7	7	8	

Рис. 2. Платежная матрица № 2
Fig. 2. Payoff matrix No. 2

Источник: составлено автором.

	B_1	B_2	B_3	Min строк
A_1	5	50	50	**5**
A_2	1	1	0,1	0,1
A_3	10	1	10	1
Max столбцов	**10**	50	50	

Рис. 3. Платежная матрица № 3
Fig. 3. Payoff matrix No. 3

Источник: составлено автором.

линейного программирования и расчет показателя оптимизационной конкуренции приводит к следующим результатам. Цена игры (седловая точка) равна 4,03 при выборе игроком A стратегий с вероятностями $x_1 = 0{,}43$; $x_2 = 0{,}23$; $x_3 = 0{,}34$. Показатели оптимизационной конкуренции K и $K_{\text{норм}}$ равны нулю. Казалось бы, что игра в смешанных стратегиях, в которых уже нет «чистого выигрыша», а значит, речь идет только о математическом ожидании (среднем значении) выигрыша, и не должна сопровождаться высокой оптимизационной конкуренцией. Но это не совсем так. Рассмотрим еще одну задачу, прежде чем окончательно сформулировать вывод относительно оптимизационной конкуренции в аспекте матричных игр со смешанными стратегиями. Пусть на рисунке 3 дана матричная игра.

Значение цены игры (седловой точки) находится между 5 и 10 и определяется в смешанных стратегиях. Решение соответствующей данной матрице платежей задачи линейного программирования и расчет показателя оптимизационной конкуренции дают следующие результаты. Цена игры (седловая точка) равна 9,17 при выборе игроком A стратегий с вероятностями $x_1 = 0{,}17$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0{,}83$. Показатель оптимизационной конкуренции $K_{\text{норм}} = 0{,}891$.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что выигрыш в матричных играх с чистыми стратегиями всегда отличается ненулевой оптимизационной конкуренцией, а математическое ожидание выигрыша в смешанных стратегиях может сопровождаться и нулевой, и ненулевой оптимизационной конкуренцией. Этот вывод целесообразно трактовать и следующим образом. «Чистый выигрыш» требует ненулевую оптимизационную конкуренцию, а средний, ожидаемый, с вероятностью, в зависимости от матрицы платежей, может сопровождаться и нулевой, и ненулевой конкуренцией.

Вышеизложенное позволяет иначе взглянуть и на трактовку результатов игровых моделей, в частности матричных игр с нулевой суммой. Сегодня результатом игры является лишь ее цена, определяемая в чистых или смешанных стратегиях. Но приведенные в статье результаты говорят о том, что значение цены игры целесообразно сопоставлять со значением оптимизационной конкуренции, что дает дополнительную информацию для анализа. Например, одни и те же значения цены игры могут быть достигнуты при различных уровнях оптимизационной конкуренции. Существует и закономерность. Она прослеживается в том, что для одной и той же матричной игры (в которой изначально было решение в смешанных стратегиях) при изменении исходных данных платежной матрицы таким образом, что разница между верхней и нижней границей игры начнет уменьшаться, показатель оптимизационной конкуренции имеет тенденцию к росту по мере того, как данный промежуток будет сжиматься, и в итоге, если эта разница достигнет нуля, показатель примет максимальное значение. Не следует ожидать монотонного роста, это может проистекать скачком от 0 до максимума оптимизационной конкуренции. Иными словами, по мере того, как потенциал для смешанных стратегий становится все меньше (диапазон между максимином и минимаксом уменьшается), происходит рост оптимизационной конкуренции.

Выводы

1. Таким образом, выявлена связь между оптимизационной конкуренцией и результатами матричных игр с нулевой суммой. «Чистый выигрыш» возможен только при ненулевой оптимизационной конкуренции, а средний, ожидаемый, с вероятностью, в зависимости от матрицы платежей, может сопровождаться и нулевой, и ненулевой конкуренцией.

2. Изложенный в статье подход позволяет по-новому подойти к трактовке результатов игровых моделей, в частности матричных игр с нулевой суммой. В настоящее время результатом игры является лишь ее цена, определяемая в чистых или смешанных стратегиях. Но приведенные выше результаты говорят о том, что значение цены игры целесообразно сопоставлять со значением оптимизационной конкуренции, что дает дополнительную информацию для анализа.

Список источников

1. *Баркалая О. Г.* Понятие конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов и методы ее оценки // Экономика и управление. 2021. Т. 27. № 9. С. 734–740. DOI: 10.35854/1998-1627-2021-9-734-740
2. *Баркалая О. Г.* Об исследовании конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов // Экономика и управление. 2022. Т. 28. № 4. С. 359–368. DOI: 10.35854/1998-1627-2022-4-359-368
3. *Вагнер Г.* Основы исследования операций: в 3 т. Т. 1 / пер. с англ. М.: Мир, 1972. 335 с.
4. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257 с.
5. *Зенкевич Н. А., Губар Е. А.* Практикум по исследованию операций: учеб. пособие. СПб.: Золотое сечение, 2007. 170 с.
6. *Акофф Р., Сасиени М.* Основы исследования операций / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 534 с.
7. *Саати Т. Л.* Математические методы исследования операций. М.: Воениздат, 1963. 420 с.
8. *Таха Х. А.* Исследование операций / пер. с англ. 10-е изд. СПб.: Диалектика, 2019. 1056 с.
9. *Данскин Дж. М.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / пер. с англ. М. В. Воронова. М.: Советское радио, 1970. 200 с.

References

1. Barkalaya O.G. The concept of competition in optimal resource allocation and methods for its assessment. *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management.* 2021;27(9):734-740. (In Russ.). DOI: 10.35854/1998-1627-2021-9-734-740
2. Barkalaya O.G. Investigating competition in the problems of optimal resource allocation. *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management.* 2022;28(4):359-368. (In Russ.). DOI: 10.35854/1998-1627-2022-4-359-368
3. Wagner H.M. Principles of operations research: With applications to managerial decisions. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.; 1969. 937 p. (Russ. ed.: Wagner H. Osnovy issledovaniya operatsii. In 3 vols. Vol. 1. Moscow: Mir Publ.; 1972. 335 p.).
4. Trukhaev R.I. Models of decision making under uncertainty. Moscow: Nauka; 1981. 257 p. (In Russ.).
5. Zenkevich N.A., Gubar E.A. Operations research workshop. St. Petersburg: Zolotoe sechenie; 2007. 170 p. (In Russ.).
6. Ackoff R.L., Sasieni M.W. Fundamentals of operations research. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.; 1968. 455 p. (Russ. ed.: Ackoff R., Sasieni M. Osnovy issledovaniya operatsii. Moscow: Mir Publ.; 1971. 534 p.).
7. Saaty T.L. Mathematical methods of operations research. New York, NY: McGraw-Hill Book Co., Inc.; 1959. 421 p. (Russ. ed.: Saaty T.L. Matematicheskie metody issledovaniya operatsii. Moscow: Voenizdat; 1963. 420 p.).

8. Taha H.A. Operations research: An introduction. New York, NY: Macmillan Publishing Co., Inc.; 1987. 876 p. (Russ. ed.: Taha H.A. Issledovanie operatsii. Moscow: Dialektika; 2019. 1056 p.).
9. Danskin J.M. The theory of max-min and its application to weapons allocation problems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1967. 128 p. (Russ. ed.: Danskin J.M. Teoriya maksimina i ee prilozhenie k zadacham raspredeleniya vooruzheniya. Moscow: Sovetskoe radio; 1970. 200 p.).

Сведения об авторе

Онисе Гивович Баркалая

кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры информационных технологий и математики

Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики

190020, Санкт-Петербург, Лермонтовский пр., д. 44а

Поступила в редакцию 17.01.2025
Прошла рецензирование 12.02.2025
Подписана в печать 13.03.2025

Information about the author

Onise G. Barkalaya

PhD in Technical Sciences, senior researcher, Associate Professor at the Department of Information Technologies and Mathematics

St. Petersburg University of Management Technologies and Economics

44A Lermontovskiy Ave., St. Petersburg 190020, Russia

Received 17.01.2025
Revised 12.02.2025
Accepted 13.03.2025

Конфликт интересов: автор декларирует отсутствие конфликта интересов, связанных с публикацией данной статьи.

Conflict of interest: the author declares no conflict of interest related to the publication of this article.