Оригинальная статья / Original article

УДК 519.87
http://doi.org/10.35854/1998-1627-2022-4-359-368

Об исследовании конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов

Онисе Гивович Баркалая
Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики, Санкт-Петербург, Россия, pampey16011958@mail.ru

Аннотация

Цель. Рассмотреть вопросы оценки параметров в задачах оптимального распределения ресурсов на введенный ранее показатель конкуренции. Провести анализ влияния размерности, ресурсных ограничений, ряда других факторов на показатель конкуренции. С помощью примеров охарактеризовать связь показателя с экстремумом целевой функции, ограничениями и двойственными оценками.

Задачи. Рассмотреть случаи, когда показатель конкуренции улавливает изменение исходных данных, которое невозможно оценить на основе традиционных показателей анализа и оценок: максимума целевой функции, оптимального решения, множителей Лагранжа или двойственных переменных. На примерах и в общем случае выявить связь показателя конкуренции с оптимумом целевой функции и двойственными переменными, показать, что анализ результатов решения задачи становится более емким и информативным, если к нему присоединить фактор «конкурентности» переменных. Определить закономерности между эффективностью, конкуренцией, ресурсными ограничениями и двойственными оценками.

Методология. В основе выбранного показателя конкуренции для задач оптимального распределения ресурсов находится понятие «жесткость отбора» конкурентов, претендующих на ресурсы. Их расчет проводится в полном соответствии с известными условиями оптимальности для задач данного класса и позволяет трактовать результаты оптимизации как меру соперничества за ресурсы.

Результаты. В приведенных примерах, отражающих линейные и нелинейные функции, находит отражение взаимосвязь показателя конкуренции с двойственными оценками, ресурсными ограничениями и эффективностью. Доказано, что показатель конкуренции логично вписывается в традиционный анализ результатов решения задачи линейного и нелинейного программирования с учетом двойственности.

Выводы. Рассматриваемые в статье показатели конкуренции могут быть включены в стандартный анализ решения задач оптимального распределения ресурсов, предусматривающий отыскание экстремума, поиск оптимального плана, анализ устойчивости, пределов, двойственных оценок, меры дефицитности ресурсов. Присоединение к анализу показателя конкуренции, как доказано на примерах, не только делает анализ результатов более емким и информативным, но и позволяет обнаружить закономерности между конкуренцией и эффективностью, подобные тому, когда снятие барьеров и ограничений в экономике приводит к ее оживлению, а сокращение ресурсов вызывает обострение конкуренции.

Ключевые слова: *конкуренция, оценка параметров, ресурсы, оптимизация, эффективность*

Для цитирования: Баркалая О. Г. Об исследовании конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов // *Экономика и управление.* 2022. Т. 28. № 4. С. 359–368. http://doi.org/10.35854/1998-1627-2022-4-359-368

Investigating competition in the problems of optimal resource allocation

Onise G. Barkalaya
St. Petersburg University of Management Technologies and Economics, St. Petersburg, Russia, pampey16011958@mail.ru

Abstract

Aim. The presented study aims to address the issues of parameter estimation in the problems of optimal resources allocation for the previously introduced competition indicator; to analyze the influence of dimensionality, resource constraints, and other factors on the competition indicator; to exemplify the relationship between the indicator and the extremum of the objective function, constraints, and dual estimates.

Tasks. The authors consider cases when the competition indicator captures a change in the initial data that cannot be estimated on the basis of traditional indicators of analysis and estimates: the maximum of the objective function, the optimal solution, Lagrange multipliers, or dual variables; determine the relationship between the competition indicator and the optimum of the objective function and dual variables through examples and in general; show that the analysis of the results of solving the problem becomes more capacious and informative if the factor of variable "competitiveness" is applied; identify patterns between efficiency, competition, resource constraints, and dual estimates.

Methods. The selected competition indicator for optimal resource allocation tasks is based on the concept of "rigorous selection" of competitors applying for resources. The indicators are calculated in full accordance with the known optimality conditions for problems of this class, making it possible to interpret the results of optimization as a measure of competition for resources.

Results. The provided examples reflect linear and nonlinear functions as well as the relationship between the competition indicator and dual estimates, resource constraints, and efficiency. It is proved that the competition indicator logically fits into the traditional analysis of the results of solving the problem of linear and nonlinear programming with allowance for duality.

Conclusion. The competition indicators considered in the study can be included in the standard analysis for solving the problems of optimal resource allocation, which involves finding an extremum, searching for an optimal plan, analyzing stability, limits, dual estimates, a measure of resource scarcity. As can be seen from the examples, applying the competition indicator to the analysis not only makes the analysis of the results more capacious and informative, but also makes it possible to detect patterns between competition and efficiency, similar to when the removal of barriers and restrictions in the economy leads to its revival, and the reduction of resources causes increased competition.

Keywords: *competition, parameter estimation, resources, optimization, efficiency*

For citation: Barkalaya O.G. Investigating competition in the problems of optimal resource allocation // *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management.* 2022;28(4):359-368 (In Russ.). http://doi.org/10.35854/1998-1627-2022-4-359-368

Введение

В настоящей статье прослеживается развитие подхода, изложенного ранее в одной из предыдущих статей [1], по следующим направлениям:

1. Если ранее в статье [1] введено математически формализованное понятие конкуренции для задач оптимального распределения ресурсов, то цель настоящей статьи — более полное исследование показателей конкуренции применительно к оптимизационным задачам данного типа.

2. Ранее показатель конкуренции рассмотрен для определенного типа экономико-математических моделей — задач оптимального распределения ресурсов. В настоящей статье показатель конкуренции обобщен для использования в более широком круге подобных задач.

3. Если в предыдущей статье [1] определена зависимость конкуренции только от распределяемых ресурсов, то в предлагаемой статье исследовано влияние и иных факторов: размерности задач оптимального распределения ресурсов и числа ресурсных ограничений.

4. В предыдущей статье [1] лишь указана принципиальная возможность связи показателя конкуренции с двойственными оценками, ресурсами и другими параметрами задач оптимального распределения ресурсов. В настоящей статье проведен количественный и качественный анализ взаимосвязи конкуренции, эффективности, ограничений и двойственных оценок.

Показатель конкуренции для нелинейных задач оптимизации

Рассмотрим оптимизационную задачу следующего типа:

$$\max_{x_1,\ x_2 \ldots x_n} f\left(x_1,\, x_2 \ldots x_n\right) \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0,\ \ j = 1,\ 2 \ldots m \quad (2)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2 \ldots n \quad (3)$$

Целевая функция $f\left(x_1,\, x_2 \ldots x_n\right)$ представляет собой либо эффективность, либо доходы или прибыль в зависимости от экономического содержания задачи. Ограничения (2) — суть различного рода бюджетные, производственные, финансовые, технологические, иные ресурсные ограничения. Переменные $\left(x_1,\, x_2 \ldots x_n\right)$, в зависимости от содержания задачи, могут отражать план выпуска продукции, план перевозок товарной продукции, распределение инвестиций между несколькими предприятиями и т. д.

Многие задачи оптимального распределения ресурсов, оптимального бюджетирования, целесообразного распределения инвестиций, оптимизации производственного плана, управления запасами сводятся к формулировке и решению задачи (1)–(3). В предыдущей статье [1] речь шла о том, что в реальности процессы, которые моделируются математическими задачами типа (1)–(3), в ряде случаев отличает конкуренция. Это типично, к примеру, для разработки бюджетов. Формирование бюджетов может отличать соперничество различных лоббирующих групп.

Такая конкуренция естественна, поскольку одни и те же цели (чтобы бюджет или план был эффективным) могут быть достигнуты разными средствами или их сочетаниями. Но, с учетом того, что многие практические задачи, в которых возникает конкуренция относительно ресурсов, могут быть сведены к задаче (1)–(3), возникает вопрос о том, где именно в математической постановке задачи проявляется эта конкуренция. Подобно тому, как на финансирование той или иной статьи бюджета претендуют различные организации (получатели средств, поставщики), что приводит к соперничеству между ними, так и в соответствующих математических моделях должна быть отражена некая величина, которая будет характеризовать конкуренцию за ресурсы.

Ранее в статье [1] нами введено понятие конкурентной переменной. Если переменная в оптимальном плане решения задачи (1)–(3) положительна ($x_i^* > 0$), то она конкурентна, если $x_i^* = 0$, то считаем ее неконкурентной. «Конкурентность» переменной означает ее «доступ» к распределяемым ресурсам. Существующие методы решения задач нацелены прежде всего на поиск оптимального решения, что гарантирует нахождение конкурентных и неконкурентных переменных. Вместе с тем показатель конкуренции отвечает и на вопрос о том, какова была острота соперничества (конкуренция) при оптимизации распределения ресурсов.

Идея заключается в том, чтобы сформулировать математический критерий, который отражает «жесткость отбора» конкурентных переменных. Важно учитывать, что в одних задачах в оптимальном решении, независимо от вариации исходных данных, все n переменных «получают ресурсы» ($x_i^* > 0$), например, если требуется найти максимум целевой функции вида: $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$. В других — наоборот: сокращение объемов ресурсов приводит к появлению нулевых решений, то есть неконкурентных переменных. Показатель конкуренции определен из условий оптимальности решения задачи (1)–(3) для тех случаев, в которых они необходимы и достаточны [2, 3]. Если $x_1, x_2 \ldots x_n$ — оптимальное решение задачи (1) — (3), то существуют такие неотрицательные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что выполняются условия:

$$\frac{\partial f\left(x_1^*,\, x_2^* \ldots\, x_n^*\right)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j\left(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*\right)}{\partial x_i} \quad (4)$$

при $x_i^* > 0$;

$$\frac{\partial f\left(x_1^*,\, x_2^* \ldots\, x_n^*\right)}{\partial x_i} \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j\left(x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*\right)}{\partial x_i} \quad (5)$$

при $x_i^* = 0$.

Иными словами, чтобы переменная была конкурентной, частная производная (скорость) целевой функции по ней должна «взять» определенный барьер, то есть знак равенства в (4), составленный из линейной комбинации частных производных ограничений. И, напротив, если величина скорости целевой функции по какой-либо переменной не достигает этого барьера — знак неравенства в (5) — то переменная в оптимальном решении будет неконкурентной. В качестве показателя конкуренции (K) принята сумма разниц между правыми и левыми частями неравенств (5), физический смысл которой сводится к суммарному недостатку (дефициту) скорости по переменным, что и не позволило обеспечить их положительность (конкурентоспособность). В частности, если в оптимальном решении будут фигурировать только условия равенства (4), то $K = 0$. Становится очевидным, что конкуренция отсутствует: ни одна переменная не получает отказа в ресурсах.

В задачах линейного программирования это происходит в тех случаях, если число ограничений равно числу переменных: базисное решение является единственным. Более того, в любых подобных задачах с ограничениями-равенствами и отсутствием условия на неотрицательность переменных показатель конкуренции (по своему определению) обращается в ноль.

Показатель конкуренции для линейных задач

Для задач линейного программирования

$$\max_{x_1, x_2 \ldots x_n} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{6}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \tag{7}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \tag{8}$$

$$x_i \ge 0, \; i = 1, \; 2 \ldots n$$

условия оптимальности (теорема дополнительной нежесткости [4]) можно записать аналогично, как в случаях (4), (5):

$$c_i = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \;\; \text{при} \;\; x_i^* > 0 \tag{9}$$

$$c_i \le \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a_{ji} \;\; \text{при} \;\; x_i^* = 0. \tag{10}$$

В линейном случае показатель конкуренции определяется таким образом:

$$K = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j a_{ji} - c_i). \tag{11}$$

Физический смысл показателя — недостаток скорости целевой функции по всем нулевым (неконкурентным) переменным. При этом наблюдается аналогичная интерпретация — переменная x_i неконкурентна, если величина c_i — частная производная целевой функции по ней — не может взять «барьер», составленный из линейной комбинации частных производных ограничений (10). Данный показатель легко вычислить из индексной строки итоговой симплекс-таблицы: сумма элементов по столбцам свободных переменных.

Рассмотрим пример, который подтверждает, что показатель конкуренции дает дополнительную информацию для анализа, если традиционные критерии (множитель Лагранжа, двойственные оценки, экстремум функции и др.) не чувствительны к изменению параметров задачи.

Пусть:

$$\max_{x_1, x_2 \ldots x_4} 10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \tag{12}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \tag{13}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1, \; 2, \; 3, \; 4. \tag{14}$$

Для задачи (12)–(14) условия оптимальности таковы:

$$10 = \lambda, \text{ при } x_1^* = 20$$

$$3 < \lambda, \text{ при } x_2^* = 0$$

$$2 < \lambda, \text{ при } x_3^* = 0$$

$$1 < \lambda, \text{ при } x_4^* = 0.$$

Таким образом, максимум целевой функции ($L^* = 200$) достигается при $x_1^* = 20$, $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$. Двойственная переменная (множитель Лагранжа): $\lambda = 10$. Показатель конкуренции равен $(10 - 3) + (10 - 2) + (10 - 1) = 24$.

Если коэффициенты в целевой функции (12) переменных x_2, x_3, x_4 изменятся в сторону увеличения до значений, например, 9, то целевая функция будет иметь вид: $10x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4$. Однако решение задачи (12)–(14) с последней целевой функцией не изменит ни максимума целевой функции, ни оптимального решения, ни множителя Лагранжа (двойственную переменную) — все эти значения останутся прежними.

И только показатель конкуренции ($K = 3$) проявит чувствительность к изменению исходных параметров. Он снизится (в восемь раз), что означает существенное уменьшение дефицита скорости по нулевым переменным. Таким образом, неконкурентным переменным уже немного не хватает для получения ресурсов.

Исследование зависимости конкуренции от числа переменных — «конкурентов» (нелинейный случай)

В предыдущей статье [1] нами приведен пример, показывающий зависимость максимума целевой функции от уровня ресурсов и «неравномерности» конкурентов. Расчеты подтверждали известное положение: с уменьшением ресурсов происходит обострение конкуренции.

Рассмотрим далее зависимость уровня конкуренции от числа конкурентов (переменных) на примере известной задачи оптимального распределения ресурсов [5]. Найти максимум функции (15) при ограничениях (16) и (17):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(1 - e^{-b_i x_i}\right) \quad (15)$$

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = X \quad (16)$$

$$x_i \geq 0. \quad (17)$$

Оптимальное решение задачи (15)–(17) может быть найдено из условий (18), (19). Если x_i^* — оптимальное решение задачи, то существует положительное λ (множитель Лагранжа) такое, что

$$f_i'(x_i^*) = a_i b_i e^{-b_i \cdot x_i^*} = \lambda, \text{ если } x_i^* > 0. \quad (18)$$

$$f_i'(x_i^*) = a_i b_i e^{-b_i \cdot x_i^*} \leq \lambda, \text{ если } x_i^* = 0. \quad (19)$$

Величина λ относительно легко находится из уравнения для всех положительных x_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{b_i} ln \frac{a_i b_i}{\lambda} = X. \quad (20)$$

Показатель конкуренции K в этом случае равен:

$$K = \sum_{i=1}^{n} (\lambda - a_i b_i). \quad (21)$$

Суммирование в (21) ведется по тем i, для которых $x_i^* = 0$.

Показатель конкуренции, как следует из (21), тем больше, чем больше λ — «планка доступа к ресурсам» — и чем больше нулевых переменных. Если в той или иной задаче при увеличении числа переменных λ является статичной величиной, а новые переменные ввиду неэффективности не влияют на формирование λ (20), то это означает, что рост числа таких неконкурентных переменных будет очевидным образом увеличивать показатель конкуренции.

Это характерно для случаев, если существует группа сильных конкурентов, которые формируют критерий доступа к ресурсам, и сколько бы ни было слабых конкурентов, показатель K с ростом их числа будет только возрастать, что следует из (21). Интерес представляет другое, в частности влияние числа переменных на конкуренцию, если множитель λ уменьшается с ростом размерности задачи (n).

С этой целью зададим следующие исходные данные для задачи (15)–(17). Общий уровень ресурсов X равен 1. Число переменных n варьируется от двух до десяти. Коэффициенты b_i будем считать равными 1 для простоты и наглядности результатов. Следовательно, оптимальный план x_i^* будет зависеть только от $X = 1$, a_i и n. Коэффициенты a_i (нормируем их и будем считать, что в сумме они равны 1) задаём таким образом, чтобы отразить три случая.

Первый случай, если все переменные в оптимальном плане заведомо равны (и, следовательно, конкурентоспособны) ($x_i^* > 0$ для всех $i = 1\ldots n$). Это означает, что все переменные «получат доступ к ресурсам» $\left(a_i = \frac{1}{n}\right)$. Данный случай предлагаем назвать «равные конкуренты».

Во втором случае, если допустим, что a_i неодинаковы, уже не будет равенства конкурентов. Распределение x_i^* в соответствии с условиями оптимальности (18), (19) может привести к появлению и нулевых решений. Этот случай отражает вариант «неравных конкурентов». Различие между коэффициентами a_i зададим с помощью коэффициентов Фишборна [6] $a_i = \frac{2 \cdot (n - i + 1)}{n(n+1)}$. Они сформируют своего рода множество «неравных конкурентов», где исходные данные подчинены отношению $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, и равного получения ресурсов заведомо быть не может.

С помощью других (усиленных) коэффициентов Фишборна [6] $a_i = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1}$ можно задать и более сильное неравенство между конкурентами с аналогичным, как и в предыдущем случае, отношении. Только различие между коэффициентами будет более ощутимым. Назовем этот случай как «сильное неравенство конкурентов».

Результаты расчетов представлены в таблице 1, где $\bar{n}$ — число нулевых переменных в оптимальном решении, K — показа-

Таблица 1

Результаты расчетов

Table 1. Calculation data

	Равные конкуренты				Неравные конкуренты				Сильное неравенство			
n	f^*	λ	K	$\bar{n}$	f^*	λ	K	$\bar{n}$	f^*	λ	K	$\bar{n}$
2	0,393	0,303	0	0	0,428	0,286	0	0	0,428	0,286	0	0
3	0,283	0,239	0	0	0,338	0,248	0,082	1	0,367	0,245	0,102	1
4	0,221	0,195	0	0	0,280	0,210	0,120	2	0,343	0,229	0,259	2
5	0,181	0,164	0	0	0,239	0,187	0,174	2	0,331	0,221	0,436	3
6	0,154	0,141	0	0	0,209	0,168	0,219	3	0,326	0,218	0,634	4
7	0,133	0,124	0	0	0,187	0,152	0,251	4	0,324	0,216	0,836	5
8	0,118	0,11	0	0	0,168	0,139	0,276	4	0,322	0,215	1,042	6
9	0,105	0,099	0	0	0,153	0,128	0,308	5	0,322	0,215	1,257	7
10	0,095	0,09	0	0	0,141	0,119	0,334	6	0,321	0,215	1,471	8

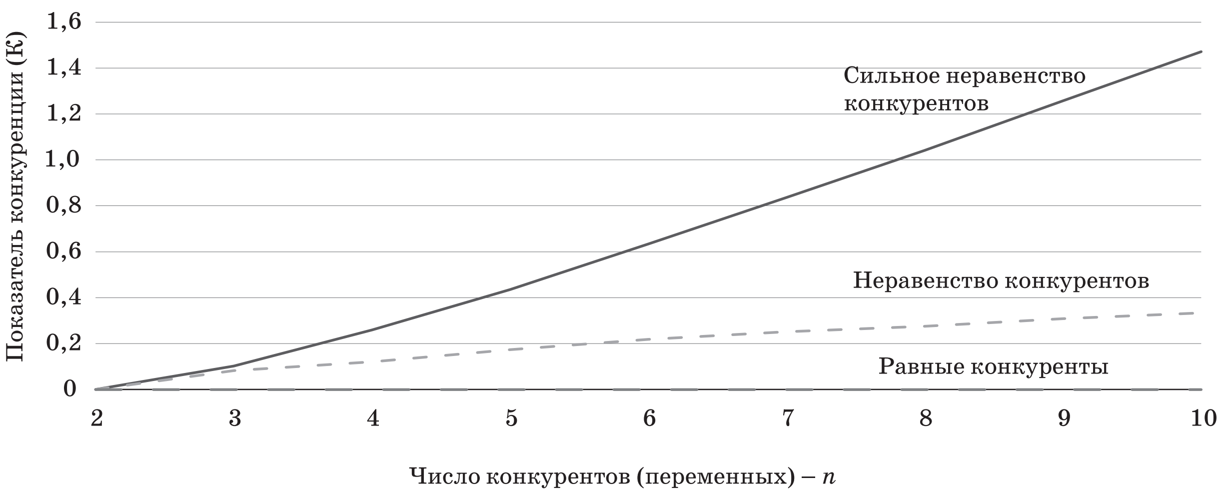

Рис. 1. Изменение показателя конкуренции от числа конкурентов

Fig. 1. Changes in the competition indicator depending on the number of competitors

тель конкуренции, f^* — максимум целевой функции, λ — множитель Лагранжа. То, что максимум целевой функции и множитель Лагранжа (λ) падает с ростом n, становится понятным: это связано с характером задания коэффициентов $a_i = \dfrac{2\cdot(n-i+1)}{n(n+1)}$.

Разброс значений a_i с ростом n уменьшается, и a_i по своим абсолютным величинам становятся меньше. Казалось бы, и показатель конкуренции (K) не должен возрастать, поскольку уменьшение λ (21) ведет к уменьшению показателя конкуренции. Однако налицо рост конкуренции (и числа неконкурентных переменных) по мере увеличения числа переменных (конкурентов), как видно на рисунке 1.

Итак, чем более неравномерной (жесткой) является конкурентная среда, как показано на рисунке 1, тем больше рост числа переменных приводит к обострению конкуренции. Из рисунков 2, 3 следует, что именно жесткая конкурентная среда обеспечивает устойчивость экстремума функции и множителя Лагранжа (эффективность) при увеличении числа переменных (конкурентов). Важным является не число конкурентов, а конкурентная среда.

Исследование зависимости показателя конкуренции от числа ограничений (линейный случай)

Рассмотрим влияние ограничений на критерий «конкурентности» в линейной задаче (6)–(8). Поставим задачу: определить взаимосвязь максимума целевой функции и показателя конкуренции в зависимости от числа ограничений. В ряде случаев закономерность между ростом максимума функции и одновременно при этом увеличением показателя конкуренции очевидна.

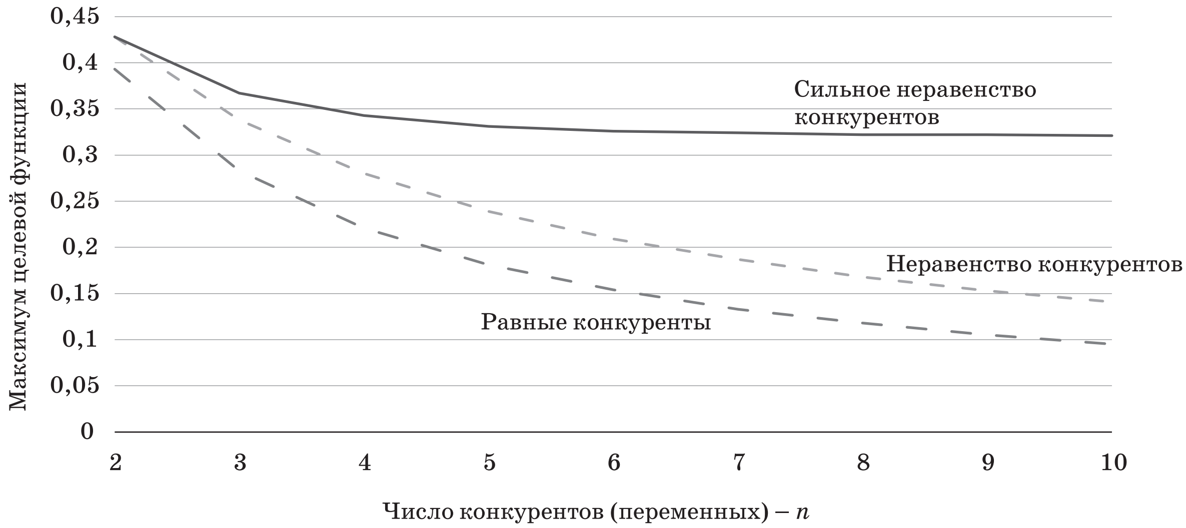

Рис. 2. Изменение максимума целевой функции от числа конкурентов
Fig. 2. Changes in the maximum of the objective function depending on the number of competitors

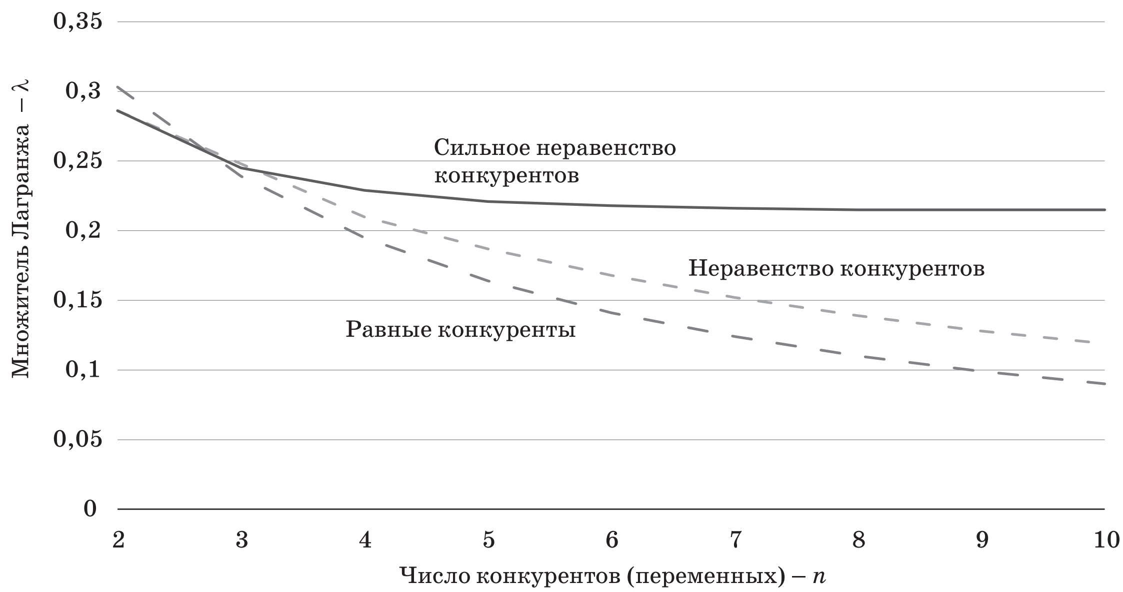

Рис. 3. Изменение множителя Лангража от числа конкурентов
Fig. 3. Changes in the Langrage multiplier depending on the number of competitors

Предположим, в задаче линейного программирования n переменных и n ограничений-равенств. Тогда при существовании базисного решения, в предположении о том, что все переменные в оптимальном решении положительны, показатель конкуренции всегда равен нулю. Если отбросить ряд ограничений, допустим m ($m < n$), то базисное решение будет уже состоять из $n - m$ решений, а число нулевых, неконкурентных переменных станет равным m и однозначно приведет к росту показателя конкуренции K.

К тому же максимум целевой функции может лишь возрасти. Напрашивается сходство с тем, когда снятие барьеров и ограничений в экономике приводит к ее оживлению. Но подобная закономерность (рост максимума целевой функции, сопровождаемый и увеличением конкуренции) справедлива, если «стартовая задача» (до отбрасывания ряда ограничений) имеет нулевую конкуренцию. В более общем случае такая четкая закономерность не прослеживается. Далее приведем соответствующий пример.

Связь показателя конкуренции с экстремумом целевой функции, ограничениями и двойственными оценками

Итак, решаем задачу линейного программирования, отбрасывая определенное ограничение из «стартового набора», но так, чтобы во всех этих случаях решение задачи было конечно. На каждом шаге будем вычислять максимум функции, двойственные переменные и показатель конкуренции. Поскольку каждое новое множество ограничений ввиду выпуклости ограничений будет содержать множество ограничений предыдущей задачи, то максимум целевой функции (по сравнению с решением первоначальной задачей) может только возрастать. Как будет изменяться показатель конкуренции?

Рассмотрим следующий пример:

$$\max_{x_1, x_2 .. x_4} (72x_1 + 65x_2 + 110x_3 + 100x_4). \quad (22)$$

Ограничения:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 18 \quad (23)$$

$$7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \le 69 \quad (24)$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 \le 95 \quad (25)$$

$$x_3 \le 3 \quad (26)$$

$$x_1, \ldots, x_4 \ge 0. \quad (27)$$

Максимум функции (22) равен **1 007,1** при $x_1 = 4{,}8$; $x_2 = 5{,}1$; $x_3 = 3$; $x_4 = 0$. Двойственные переменные (мера влияния ограничений на максимум целевой функции) по ограничениям равны: 16,7 для (23); 7,9 для (24); 0 для (25); 53,8 для (26). Показатель конкуренции равен **92,6**.

Решим задачу (22)–(27), но, отбросив ограничение (24), минимальное по положительным «весам» ограничений (7,9). В этом случае максимум функции (22) равен **1 343,5** при $x_1 = 16{,}75$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1{,}25$; $x_4 = 0$. Двойственные переменные равны: 24,5 для (23); 9,5 для (25); 0 для (26). Показатель конкуренции — **233,5**.

Следующий шаг — решение задачи (22)–(27). Отбросим ограничение (23), «вес» которого в ограничениях первоначальной задачи равен 16,7. В этом случае максимум функции (22) равен **1 188,8** при $x_1 = 0{,}92$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$; $x_4 = 7{,}92$. Двойственные переменные по ограничениям равны: 2,92 для (24); 10,3 для (25); 2,62 для (26). Показатель конкуренции — **34,69**.

И последний шаг: решим задачу (22)–(27), но, отбросив ограничение (26), которое было в первоначальной задаче максимальным по «весу» ограничений (53,8). В этом случае максимум функции (22) равен **1 202,9** при $x_1 = 3{,}84$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8{,}42$; $x_4 = 0$. Двойственные переменные (мера влияния ограничений на максимум целевой функции) равны: 0 для (23); 2,58 для (24); 10,8 для (25). Показатель конкуренции — **36**.

Сравним результаты решения предыдущих четырех задач. Показатель конкуренции (11) тем больше, чем больше нулевых решений и величины двойственных переменных. Это наглядно демонстрируют приведенные расчеты. В решении первоначальной задачи (22)–(27) двойственные переменные наибольшие по сравнению с остальными решениями, а нулевое решение — одно.

Показатель конкуренции в «стартовой» задаче равен **92,6.** Высокое значение конкуренции связано прежде всего с немалыми значениями двойственных переменных. При решении задачи (22)–(27) без ограничения (24), минимального по весу (7,9), показатель конкуренции существенно увеличивается (233,5), что обусловлено высокими значениями двойственных переменных и уже двумя нулевыми решениями. Причем обнаружен существенный рост максимума целевой функции.

При решении задачи (22)–(27) без ограничения (23), с весом (16,7), показатель конкуренции резко падает (34,69), что связано также с падением значений двойственных переменных и только одним нулевым решением. Прирост целевой функции меньше, чем в предыдущей задаче. Наконец, при решении задачи (22)–(27) без ограничения (26), самого большого по весу, наблюдаются минимальные значения двойственных переменных, которые и при двух нулевых переменных обусловливают невысокий уровень конкуренции (36).

Таким образом, показатель конкуренции логично вписывается в традиционный анализ результатов решения задачи линейного программирования с учетом двойственности и позволяет объяснить полученные результаты.

Связь показателя конкуренции и ресурсных ограничений

В приведенном из предыдущей статьи [1] примере о максимизации экспоненциальной функции показано, что сокращение ресурсов в ограничении задачи увеличивает конкуренцию. Это имеет простое объяснение: с уменьшением ресурсов происходит увеличение и множителя Лагранжа (аналога двойственных переменных в линейной задаче), и количества нулевых (неконкурентных) решений, что и вызывает, согласно формуле, рост показателя конкуренции.

В линейном случае дефицит ресурсов в ограничениях не обладает подобным влиянием на конкуренцию, поскольку при колебаниях параметров b_i в задаче (6)–(8) двойственные переменные и оптимальное решение могут обладать определенной устойчивостью, не изменяться [7; 8; 9]. Поэтому и показатель конкуренции может оставаться неизменным. Сокращение ресурсов должно быть более значительным, чтобы оценить поведение показателя конкуренции.

Рассмотрим следующий пример:

$$\max_{x_1,\ x_2, x_3} (8x_1 + 7x_2 + x_3). \tag{28}$$

Ограничения:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 2 \tag{29}$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \tag{30}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0. \tag{31}$$

Максимум целевой функции равен 12 при $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_3 = 0$. Показатель конкуренции равен 5, а двойственные переменные $y_1 = 1,\ \ y_2 = 2$. При уменьшении ресурсов в ограничении (30) с 5 до 4,8 единиц наблюдаем следующее: максимум целевой функции равен $\frac{58}{5}$ при $x_1 = \frac{2}{5},\ x_2 = \frac{6}{5},\ x_3 = 0$. Показатель конкуренции не изменился, равен 5, и двойственные переменные остались прежними: $y_1 = 1,\ \ y_2 = 2$.

Ситуация изменяется при уменьшении ресурсов в ограничении (30) — с 5 до 2 единиц. Максимум целевой функции равен $\frac{16}{3}$ при $x_1 = \frac{2}{3},\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0$. Показатель конкуренции возрос до значения $\frac{16}{3}$, что связано с увеличением числа нулевых решении, причем одна двойственная переменная уменьшилась на 1, вторая возросла на $\frac{2}{3}$ $\left(y_1 = 0,\ y_2 = \frac{8}{3}\right)$.

Таким образом, и в линейном случае сокращение ресурсов может приводить к увеличению конкуренции, подтверждая известное наблюдение из практики. Сокращение ресурсов b_i может обнулять вес некоторых ограничений в задаче (6)–(8) и приводить к появлению нулевых переменных.

Показатель конкуренции вычисляется в абсолютных значениях, но он может быть определен и в относительных единицах, нормирован от 0 до 1 ($K_{\text{норм}}$) и сопоставим уже для различных задач. Для этого можно использовать разницу между единицей и отношением сумм левых частей (5) к сумме правых частей (5). В примере (12)–(14) $K_{\text{норм}} = 1 - \frac{6}{30} = 0{,}8$. В этом же примере, при увеличении коэффициентов целевой функции, при x_2, x_3, x_4 до 9, $K_{\text{норм}} = 1 - \frac{27}{30} = 0{,}1$.

Выводы

1. Показатель конкуренции адекватно характеризует жесткость отбора «конкурентов» при распределении ресурсов и улавливает изменение исходных данных в случаях, если это невозможно сделать на основе традиционных показателей анализа результатов решения оптимизационных задач.

2. Показатель конкуренции определяется из условий оптимальности оптимизационных задач и непосредственно связан с оптимумом целевой функции, двойственными переменными. Тем самым делает анализ результатов решения задачи более емким и информативным.

3. Анализ результатов оптимизационных задач на основе двойственных оценок, показателя конкуренции и оптимального решения позволяет определить влияние различных факторов на эффективность (среди которых конкурентная среда, число конкурентов, сокращение ресурсов и др.) и объяснить результаты не только влиянием ограничений (двойственных оценок или ресурсов), но и конкуренцией.

4. Данный подход к интерпретации переменных в оптимизационных задачах в качестве конкурентных и неконкурентных позволяет обнаружить закономерности между конкуренцией и эффективностью, подобные тем, при которых снятие барьеров и ограничений в экономике приводит к ее оживлению, а сокращение ресурсов вызывает обострение конкуренции.

Список источников

1. *Баркалая О. Г.* Понятие конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов и методы ее оценки // Экономика и управление. 2021. Т. 27. № 9. С. 734–740. DOI: 10.35854/1998-1627-2021-9-734-740
2. *Таха Х. А.* Исследование операций. 10-е изд / пер. с англ. СПб.: Диалектика, 2019. 1056 с.
3. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: учеб. пособие. 2-е изд. Киев: Вища школа, 1979. 392 с.
4. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. В 3 т. Т. 1 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. М.: Мир, 1972. 335 с.
5. *Данскин Дж. М.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / пер. с англ. М. В. Воронова. М.: Советское радио, 1970. 200 с.
6. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257 с.
7. *Зенкевич Н. А. Губар Е. А.* Практикум по исследованию операций: учеб. пособие. СПб.: Золотое сечение, 2007. 170 с.
8. *Акофф Р. Л., Сасиени М. В.* Основы исследования операций / пер. с англ. В. Я. Алтаева. М.: МИР, 1971. 534 с.
9. *Саати Т. Л.* Математические методы исследования операций / пер. с англ. Ю. М. Певницкого и др. М.: Воениздат, 1963. 420 с.

References

1. Barkalaya O.G. The concept of competition in optimal resource allocation and methods for its assessment. *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management.* 2021;27(9):734-740. (In Russ.). DOI: 10.35854/1998-1627-2021-9-734-740
2. Taha H.A. Operations research: An introduction. New York: Macmillan Publishing Co., Inc.; 1987. 876 p. (Russ. ed.: Taha H.A. Issledovanie operatsii. 2nd ed. Moscow: Dialektika; 2019. 1056 p.).
3. Zaichenko Yu.P. Operations research. 2nd ed. Kiev: Vishcha shkola; 1979. 392 p. (In Russ.).
4. Wagner H.M. Principles of operations research: With applications to managerial decisions. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc.; 1969. 937 p. (Russ. ed.: Wagner H. Osnovy issledovaniya operatsii (in 3 vols.). Vol. 1. Moscow: Mir Publ., 1972. 335 p.).
5. Danskin J.M. The theory of max-min and its application to weapons allocation problems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1967. 128 p. (Russ. ed.: Danskin J.M. Teoriya maksimina i ee prilozhenie k zadacham raspredeleniya vooruzheniya. Moscow: Sovetskoe radio; 1970. 200 p.).
6. Trukhaev R.I. Decision-making models under uncertainty. Moscow: Nauka; 1981. 257 p. (In Russ.).
7. Zenkevich N.A. Gubar E.A. Operations research workshop. St. Petersburg: Zolotoe sechenie; 2007. 170 p. (In Russ.).
8. Ackoff R.L., Sasieni M.W. Fundamentals of operations research. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 1968. 455 p. (Russ. ed.: Ackof R., Sasieni M. Osnovy issledovaniya operatsii. Moscow: Mir Publ.; 1971. 534 p.).
9. Saaty T.L. Mathematical methods of operations research. New York: McGraw-Hill; 1959. 421 p. (Russ. ed.: Saaty T.L. Matematicheskie metody issledovaniya operatsii. Moscow: Voenizdat; 1963. 420 p.).

Сведения об авторе

Онисе Гивович Баркалая

кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и математики

Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики

190103, Санкт-Петербург, Лермонтовский пр., д. 44а

Поступила в редакцию 31.01.2022
Прошла рецензирование 17.02.2022
Подписана в печать 22.04.2022

Information about Author

Onise G. Barkalaya

Ph.D. in Engineering, Associate Professor of the Department of Information Technologies and Mathematics

St. Petersburg University of Management Technologies and Economics

44A Lermontovskiy Ave., St. Petersburg 190103, Russia

Received 31.01.2022
Revised 17.02.2022
Accepted 22.04.2022

Конфликт интересов: автор декларирует отсутствие конфликта интересов, связанных с публикацией данной статьи.

Conflict of interest: the author declares no conflict of interest related to the publication of this article.