

Понятие конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов и методы ее оценки

Баркалая О. Г.¹

¹ Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики, Санкт-Петербург, Россия

Цель. Определить понятие конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов. Сформулировать ее показатели непосредственно в математической постановке задачи, отражающие конкуренцию в практических задачах.

Задачи. Выявить математические показатели, характеризующие уровень конкуренции в оптимизационных задачах по распределению ресурсов. Показать на примерах адекватность и чувствительность выбранных показателей конкуренции для различных экономических ситуаций.

Методология. В основе выбранных показателей конкуренции в данных задачах находится понятие «жесткость отбора» конкурентов, претендующих на ресурсы. Их расчет проводится в полном соответствии с известными методами оптимизации и условиями оптимальности для задач данного класса и позволяет трактовать результаты оптимизации как меру соперничества за ресурсы.

Результаты. Определены и формализованы два типа показателей конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов для линейных и нелинейных случаев. Показаны на примерах зависимости эффективности от различного состава конкурентной среды. Представлены зависимости «жесткости отбора» конкурентов в условиях сокращения ресурсов.

Выводы. Рассматриваемые в статье показатели конкуренции могут быть включены в стандартный анализ решения задач оптимального распределения ресурсов, предусматривающий отыскание экстремума, поиск оптимального плана, анализ устойчивости, пределов, влияния ограничений на целевую функцию, двойственные оценки, меру дефицитности ресурсов и т. д. Если к подобному анализу присоединить и показатель конкуренции, то получаем еще один фактор для анализа, который при прочих равных условиях может стать существенным. Возможно применение показателя конкуренции как при многошаговой процедуре нахождения экстремума функции (например, как дополнительный критерий выбора свободной переменной), так и при анализе результатов решения задачи.

Ключевые слова: конкуренция, показатели конкуренции, ресурсы, оптимизация, эффективность.

Для цитирования: Баркалая О. Г. Понятие конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов и методы ее оценки // *Экономика и управление*. 2021. Т. 27. № 9. С. 734–740. <http://doi.org/10.35854/1998-1627-2021-9-734-740>

The Concept of Competition in Optimal Resource Allocation and Methods for Its Assessment

Onise G. Barkalaya¹

¹ St. Petersburg University of Management Technologies and Economics, St. Petersburg, Russia

Aim. The presented study aims to define the concept of competition in optimal resource allocation and to determine indicators of competition in practical tasks directly in the mathematical formulation of the problem.

© Баркалая О. Г., 2021

Tasks. The authors determine mathematical indicators that characterize the level of competition in resource allocation optimization tasks and show examples of the adequacy and sensitivity of the selected competition indicators in various economic situations.

Methods. The selected competition indicators for these tasks are based on the concept of “rigorous selection” of competitors applying for resources. The indicators are calculated in full accordance with the known optimization methods and optimality conditions for problems of this class, making it possible to interpret the results of optimization as a measure of competition for resources.

Results. Two types of competition indicators for linear and non-linear cases of optimal resource allocation problems are defined and formalized. Examples of the dependence of efficiency on different compositions of the competitive environment are shown. Dependencies of the “rigorous selection” of competitors in the context of resource depletion are described.

Conclusions. The competition indicators considered in the study can be included in the standard analysis for solving the problems of optimal resource allocation, which involves finding an extremum, searching for an optimal plan, analyzing stability, limits, the effect of restrictions on the target function, dual estimates, a measure of resource scarcity, etc. Adding the competition indicator to this analysis provides another factor for analysis, which can be significant under otherwise equal conditions. The competition indicator can be used both in a multi-step procedure for finding the extremum of a function (for example, as an additional criterion for choosing a free variable) and in the analysis of the results of problem-solving.

Keywords: *competition, competition indicators, resources, optimization, efficiency.*

For citation: Barkalaya O.G. The Concept of Competition in Optimal Resource Allocation and Methods for Its Assessment // *Ekonomika i upravlenie = Economics and Management*. 2021;27(9):734-740 (In Russ.). <http://doi.org/10.35854/1998-1627-2021-9-734-740>

Многие задачи оптимального распределения ресурсов, оптимального бюджетирования, целесообразного распределения инвестиций, оптимизации производственного плана, управления запасами и т. п. сводятся к формулировке и решению следующей задачи, где требуется найти максимум целевой функции при ряде ограничений и неотрицательных переменных:

$$\min_{x_1, x_2 \dots x_n} f(x_1, x_2 \dots x_n). \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2 \dots x_n) \leq 0 \quad j = 1, 2 \dots m. \quad (2)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \dots n. \quad (3)$$

Несмотря на большое число подходов и методов, предназначенных для решения подобных задач [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7], существует один момент, который пока не учтен в задаче (1), (2), (3). Суть его заключается в следующем. В действительности процессы, отраженные математическими моделями данного типа, по нашему мнению, отличается конкуренция. Например, формирование бюджета может сопровождаться соперничеством различных лоббирующих групп. Такая конкуренция естественна.

До сих пор, как нам кажется, вопрос состоял лишь в нахождении оптимального плана, обеспечивающего максимум или

минимум критериев эффективности при тех или иных ограничениях. Но, поскольку многие практические задачи, где возникает конкуренция за ресурсы, могут быть сведены к задаче (1), (2), (3), невольно возникает вопрос о том, где при математической формализации и постановке задачи проявляется эта конкуренция. Подобно тому как на финансирование статьи бюджета претендуют различные организации (получатели средств, поставщики), что приводит к соперничеству между ними, так и в соответствующих математических моделях должна быть отражена некая величина, которая будет характеризовать конкуренцию за ресурсы.

Определим прежде всего понятие конкурентной переменной. Будем предполагать, что если переменная в оптимальном плане решения задачи (1), (2), (3) положительна ($x_i^* > 0$), то она является конкурентной; если $x_i^* = 0$, то считаем ее неконкурентной. Иными словами, «конкурентность» переменной будет означать ее доступ к распределяемым ресурсам. Однако нас интересует не решение задачи (1), (2), (3), а то, каким образом оценить остроту соперничества (конкуренцию) в задачах данного типа. Известные методы решения задач нацелены в первую очередь на поиск оптимального решения, что гарантирует нахождение конкурентных

и неконкурентных переменных. Что считать уровнем конкуренции при распределении ресурсов? Какова острота соперничества (конкуренция) при оптимизации ресурсов? Современные методы не способствуют решению данных вопросов.

Скорее всего, это должен быть некий показатель, который учитывает «жесткость отбора» конкурентных переменных. В одних задачах в оптимальном плане, независимо от вариации исходных данных, все n переменных «получают ресурсы» ($x_i^* > 0$); в других — картина меняется: сокращение ресурсов приводит к появлению нулевых решений — неконкурентных переменных. Становится понятным, что показатель конкуренции нужно определять из условий оптимальности решения задачи (1), (2), (3), которые, кстати, неоднократно описаны в исследованиях разных лет.

Рассмотрим известную задачу оптимального распределения ресурсов [5]. Найти максимум функции (4) при ограничениях (5) и (6):

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i (1 - e^{-b_i x_i}). \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = X. \quad (5)$$

$$x_i \geq 0. \quad (6)$$

Оптимальное решение задачи (4), (5), (6) может быть найдено из условий (7), (8). Если x_i^* — оптимальное решение задачи, то существует положительное λ (множитель Лагранжа):

$$f'_i(x_i^*) = a_i b_i e^{-b_i x_i^*} = \lambda, \text{ если } x_i^* > 0 \quad (7)$$

$$f'_i(x_i^*) = a_i b_i e^{-b_i x_i^*} \leq \lambda, \text{ если } x_i^* = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим условия (7), (8). Физический смысл величины λ — это скорость изменения целевой функции (4) по ограничению (5), то есть по X . Учитывая, что эффективность нередко определяют как показатель, где результаты соотносятся с затратами, то λ можно рассматривать и как эффективность. Но можно дать и иное толкование λ . Эта величина является так называемой планкой («жесткость отбора»), которую необходимо преодолеть частным производным $f'_i(x_i^*)$, чтобы i -я переменная получила какие-то ресурсы и стала конкурентной. И, наоборот, если этого не происходит, «барьер не взят», то $x_i^* = 0$ (неконкурентные переменные). Более того, величина λ формируется только

конкурентными переменными, которые разделили между собой ресурсы X , оставив «за бортом» все нулевые, «неконкурентные» переменные. Величину λ легко найти из уравнения для всех положительных x_i :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} \ln \frac{a_i b_i}{\lambda} = X. \quad (9)$$

Чтобы убедиться в том, что параметр λ может служить объективным показателем конкуренции в задаче (4), (5), (6), необходимо оценить его значение в ситуациях, которые всегда обостряли конкуренцию в таких экономических задачах, как снижение уровня финансирования или распределяемых ресурсов, «степень неравенства конкурентов». Иными словами, необходимо исследовать поведение λ , чтобы установить, будет ли выбранный показатель конкуренции объективно отражать «степень жесткости отбора» конкурентных переменных и тем самым служить мерой оценки конкуренции в задаче (4), (5), (6).

С этой целью решим задачу (4), (5), (6), варьируя исходные данные следующим образом. Общий уровень ресурсов X изменяется в пределах от 0 до 10 единиц. Число переменных $n = 10$. Коэффициенты b_i будем считать равными 1 для наглядности результатов. Таким образом, оптимальный план x_i^* ($i = 1 \dots 10$) будет зависеть только от X и a_i ($i = 1, \dots, n$). Коэффициенты a_i (нормируем их и будем считать, что в сумме они равны единице) задаются так, чтобы отразить три случая.

Первый случай: все переменные в оптимальном плане заведомо будут равны (и, следовательно, конкурентоспособны) ($x_i^* > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$). Это означает, что все переменные «получают доступ к ресурсам».

Это достигается при $a_i = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$. Данный случай назовем «равные конкуренты».

Во втором случае, если допустить, что a_i неодинаковы, уже не будет равенства конкурентов. Распределение x_i^* в соответствии с условиями оптимальности (7), (8) может привести к появлению и нулевых решений. Этот случай отражает вариант «неравных конкурентов». Различие между коэффициентами a_i зададим с помощью коэффициентов Фишборна [7], которые равны $a_i = \frac{2(n-i+1)}{n(n+1)}$. Они сформируют своего рода множество «неравных конкурентов», подчиненное отношению $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, и уже

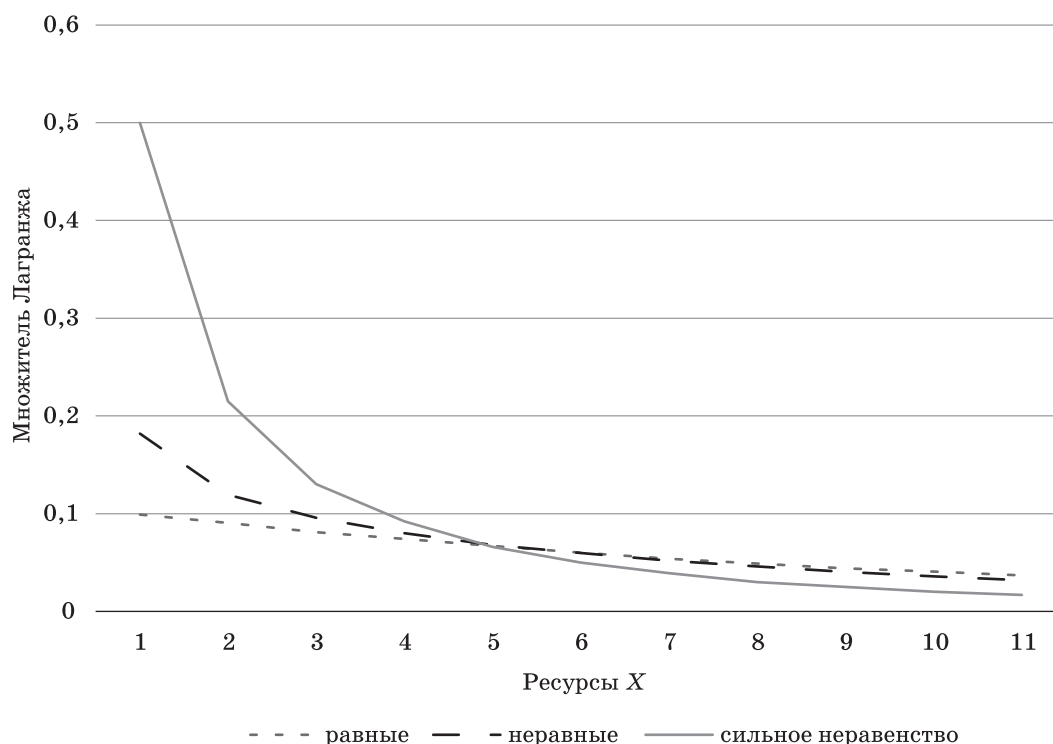


Рис. 1. Изменение показателя конкуренции (первого типа) от ресурсов и степени неравенства конкурентов

равного получения ресурсов заведомо быть не может.

С помощью других (усиленных) коэффициентов Фишборна $a_i = \frac{2^{n-i}}{2^n - 1}$ можно задать и более сильное неравенство между конкурентами с таким же, как и в предыдущем случае отношении, только различие между коэффициентами будет более ощутимым. Охарактеризуем этот случай как «сильное неравенство конкурентов».

Рассмотрим в первую очередь поведение множителя Лагранжа, решая задачу (4), (5), (6), варьируя ресурсы X от 1 до 10 для каждого из трех вариантов: равные конкуренты, неравные конкуренты, сильное неравенство конкурентов, как показано на рисунке 1. Интересным представляется то, как будет изменяться показатель λ , будет ли он характеризовать именно «жесткость отбора» конкурентов при получении ресурсов, когда при изменении исходных данных проявятся известные для процессов конкуренции моменты.

Множитель Лагранжа, указанный на рисунке 1, служит так называемой планкой или «проходным баллом» для получения ресурсов, что явствует из условия (7). Действительно, он может быть интерпретирован в качестве показателя конкуренции в исходной задаче, потому что адекватно оценивает

факторы, присущие конкуренции в целом. Во-первых, чем сильнее неравномерность конкурентной среды при дефиците (уменьшении) ресурсов, тем выше конкуренция, и наоборот, при больших ресурсах вклад конкурентной среды в общую эффективность будет небольшим. Если уменьшение ресурсов ведет во всех случаях к повышению конкуренции (это вызвано и характером целевой функции), то очевидным становится обострение конкуренции при небольших ресурсах, как видно на рисунке 1.

При неравенстве (сильном неравенстве) конкурентов с уменьшением ресурсов возможно появление неконкурентных переменных и перераспределение ресурсов в пользу «эффективных переменных». При «равных конкурентах» никто не получает отказа в ресурсах, тем самым планка доступа к ним снижается. Это подтверждается и данными, приведенными на рисунке 2. По мере уменьшения ресурсов число нулевых решений (неконкурентных переменных) растет тем больше, чем сильнее неравенство конкурентов, и лишь при равных конкурентах нулевые решения отсутствуют.

В частности, зависимости на рисунке 1 подтверждают известный факт: именно высокая конкуренция приводит к значительной эффективности, поскольку множитель Лагранжа — это эффективность, если под

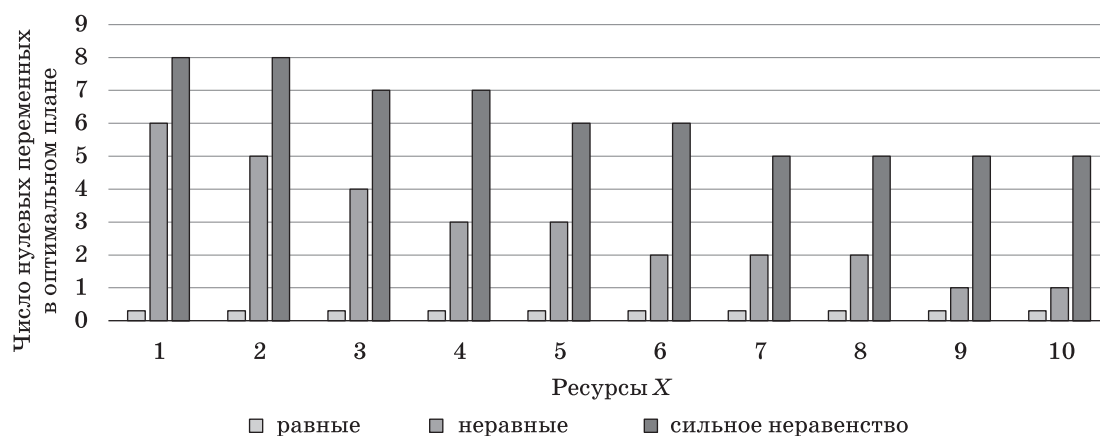


Рис. 2. Изменение числа неконкурентных переменных от ресурсов

ней понимать количественное соотношение между результатами и затратами. С увеличением ресурсов (X) это свойство обесценивается: эффективность не зависит от степени неравенства конкурентов. Как показано на рисунке 1, это происходит при $X > 5$, в рамках принятых нами условных исходных данных.

Однако этот показатель конкуренции (назовем его показателем первого типа), несмотря на то, что он адекватно оценивает конкуренцию или, иными словами, доступ к ресурсам в задаче (4), (5), (6), имеет в ряде случаев и недостатки. Во-первых, неясно, что считать показателем конкуренции в случаях нескольких ограничений: будет уже не один параметр λ , а несколько подобных множителей. Во-вторых, наблюдается неэластичность показателя в линейном случае.

Приведем пример для линейного случая. Необходимо найти максимум функции $10x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4$ при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20, \quad x_i \geq 0.$$

Условия оптимальности в данном случае следующие:

$$\begin{aligned} 10 &= \lambda, \text{ если } x_1^* > 0 \quad x_1^* = 20 \\ 1 &\leq \lambda, \text{ если } x_2^* = 0 \\ 3 &\leq \lambda, \text{ если } x_3^* = 0 \\ 2 &\leq \lambda, \text{ если } x_4^* = 0. \end{aligned}$$

Показатель конкуренции (λ) при этом равен 10, и переменные x_2, x_3, x_4 всегда будут нулевыми в оптимальном решении, если коэффициенты при них не будут равны 10. Но, если увеличить коэффициенты (при x_2, x_3, x_4) так, что они будут приближаться к 10, то ситуация должна измениться. Уровень конкуренции (умозрительно) должен падать. Шансов получить ресурсы у второй (третьей, четвертой) переменных будет больше. Пред-

положим, что коэффициент при x_2 равен 9,9. Показатель конкуренции первого типа так или иначе равен 10 и, следовательно, он нечувствителен к тому, насколько коэффициент при второй переменной приблизился к 10.

Вернемся к условиям оптимальности (7), (8). Каков физический смысл разности правой и левой части неравенств? Это — недостаток (дефицит) скорости изменения целевой функции по тем нулевым переменным, которого и не хватило, чтобы данные переменные стали положительными (получили доступ к ресурсам). Итак, суммируя разность для всех неравенств, получим показатель конкуренции второго типа, физический смысл которого не «планка доступа» к ресурсам, а «недостаток той скорости, которая и привела к нулевым решениям».

Это — физический смысл показателя (не забываем о физическом смысле производной вообще). Для экономических или иных задач данный показатель можно трактовать и как дефицит эффективности, и как дефицит конкуренции. Такой показатель не зависит от числа ограничений и чувствителен в линейном случае. К тому же в линейных задачах он легко находится из симплекс-таблицы. Вычислим показатель второго типа, представленный на рисунке 3, для аналогичной задачи (4), (5), (6), изменяя подобным образом исходные данные.

Показатель второго типа учитывает не только множитель λ , но и производные целевой функции для нулевых решений, и число нулевых решений. Данные показатели дают схожую картину (уровень конкуренции падает по мере увеличения ресурсов). Однако существуют и различия. Если множитель Лагранжа (показатель первого типа) формируется лишь исходя из положительных

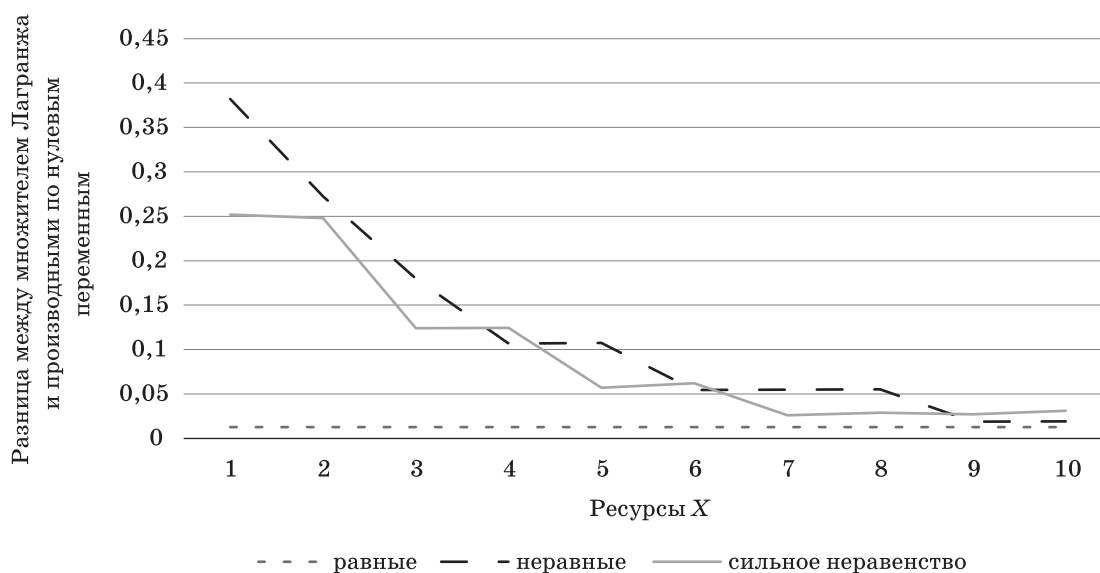


Рис. 3. Изменение показателя конкуренции (второго типа) от ресурсов и степени неравенства конкурентов

решений и задает так называемую планку доступа к ресурсам, то второй показатель конкуренции учитывает и «планку», и то, насколько неконкурентные переменные отстают от конкурентных. В этом случае, в отличие от показателя конкуренции первого типа, неравномерность конкурентов (при сокращении ресурсов) оценивается иначе: чем сильнее неравномерность конкурентов, тем у них меньше наблюдается дефицит скорости (эффективности), который и был необходим для получения ресурсов.

Подобный подход к понятию конкуренции в задачах оптимального распределения ресурсов интересен и для задач линейного программирования, а также допускает в данном случае оригинальную интерпретацию симплекс-метода. Воспользуемся двойственными оценками. Как известно, если ограничение в двойственной задаче (канонического вида) строго больше коэффициента при целевой функции (c_i), в частности

$$\sum_{j=1}^m a_{ji} y_j > c_i \quad i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

то $x_i^* = 0$.

Экономическое толкование этого известно: если затраты на изготовление единицы данного вида продукции не покрываются прибылью, то выпускать ее нецелесообразно. Но данное условие имеет и другое толкование, которое использовано при решении задачи (4), (5), (6). Разность между правой и левой частью любого неравенства из (10) — это не что иное, как недостаток

скорости (эффективности) целевой функции по i -й переменной, которого и не хватило для получения ресурсов, чтобы стать конкурентной. В качестве интегрального показателя можно взять разницу между правой и левой частями неравенств (10), суммируя ее по всем n неравенствам. Это и будет показателем конкуренции второго типа.

Такой показатель легко вычислить из значений индексной строки симплекс-таблицы прямого метода на том шаге, когда все ее значения становятся положительными. Его физический смысл состоит в следующем: суммарный недостаток (дефицит) скорости изменения функционала по переменным, которые не получили ресурсов. Иными словами, конкуренция — это дефицит эффективности, который привел к нулевым решениям (отсутствию финансирования).

Процедуру симплекс-метода, многошаговую замену базисных переменных на свободные можно рассматривать как замену неконкурентных переменных на конкурентные. По мере того, как это происходит, значения в индексной строке могут и увеличиваться, и уменьшаться. Монотонности показателя конкуренции второго типа не обнаружено. Изменение выбранного показателя конкуренции можно назвать тенденцией к росту, поскольку на каждом шаге симплекс-метода становится меньше возможностей по замене неконкурентных переменных конкурентными. Но очевиден тот факт, что процесс поиска оптимума прекращается, если все значения в индексной строке становятся

неотрицательными, окончательно формируя показатель конкуренции.

Охарактеризованные в статье показатели конкуренции можно включить в анализ решения задач оптимального распределения ресурсов. Как правило, стандартный анализ предусматривает отыскание экстремума, поиск оптимального плана, анализ устойчивости, пределов, влияния ограничений на целевую функцию, двойственные оценки,

меру дефицитности ресурсов и т. д. Если к подобному анализу присоединить и показатель конкуренции, то получим еще один фактор для анализа, который при прочих равных условиях может стать существенным. Возможно его применение и при многошаговой процедуре симплекс-метода (как дополнительный критерий выбора свободной переменной), и при анализе результатов решения нелинейных задач.

Литература

1. Таха Х. А. Исследование операций / пер. с англ. СПб.: Диалектика, 2019. 1056 с.
2. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Киев: Вища школа, 1979. 391 с.
3. Зенкевич Н. А., Марченко И. В. Экономико-математические методы. Рабочая тетрадь № 2. СПб.: Изд-во Международного банковского института, 2005. 90 с.
4. Акоф Р., Сасиени М. Основы исследования операций / пер. с англ. М.: МИР, 1971. 536 с.
5. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения / пер. с англ. М. В. Воронова. М.: Советское радио, 1970. 200 с.
6. Саати Т. Л. Математические методы исследования операций / пер. с англ. М.: Воениздат, 1963. 420 с.
7. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределенности. М.: Наука, 1981. 257 с.

References

1. Taha H.A. Operations research: An introduction. New York: Macmillan Publ. Co., Inc.; 1987. 876 p. (Russ. ed.: Taha H.A. Issledovanie operatsii. St. Petersburg: Dialektika; 2019. 1056 p.).
2. Zaichenko Yu.P. Operations research. Kiev: Vishcha shkola; 1979. 391 p. (In Russ.).
3. Zenkevich N.A., Marchenko I.V. Economic and mathematical methods. Workbook No. 2. St. Petersburg: International Banking Institute; 2005. 90 p. (In Russ.).
4. Ackoff R.L., Sasieni M.W. Fundamentals of operations research. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 1968. 455 p. (Russ. ed.: Ackoff R., Sasieni M. Osnovy issledovaniya operatsii. Moscow: Mir; 1971. 536 p.).
5. Danskin J.M. The theory of max-min and its application to weapons allocation problems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag; 1967. 128 p. (Econometrics and Operations Research. Vol. 5). (Russ. ed.: Danskin J.M. Teoriya maksimina i ee prilozhenie k zadacham raspredeleniya vooruzheniya. Moscow: Sovetskoe radio; 1970. 200 p.).
6. Saaty T.L. Mathematical methods of operations research. New York: McGraw-Hill Book Co., Inc.; 1959. 421 p. (Russ. ed.: Saaty T.L. Matematicheskie metody issledovaniya operatsii. Moscow: Voenizdat; 1963. 420 p.).
7. Trukhaev R.I. Decision making models under uncertainty. Moscow: Nauka; 1981. 257 p. (In Russ.).

Сведения об авторе

Баркалая Онисе Гивович

кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий и математики

Санкт-Петербургский университет технологий управления и экономики

190103, Санкт-Петербург, Лермонтовский пр., д. 44а

(✉) e-mail: pampey16011958@mail.ru

Поступила в редакцию 30.08.2021
Прошла рецензирование 20.09.2021
Подписана в печать 23.09.2021

Information about Author

Onise G. Barkalaya

Ph.D. in Engineering, Associate Professor of the Department of Information Technologies and Mathematics

St. Petersburg University of Management Technologies and Economics

44A Lermontovskiy Ave., St. Petersburg 190103, Russia

(✉) e-mail: pampey16011958@mail.ru

Received 30.08.2021
Revised 20.09.2021
Accepted 23.09.2021